1.1.3 Modely základních početních operací

Předpoklady:

Pedagogická poznámka: V první verzi učebnice měla opakovací kapitola pouze čtyři hodiny (kvadratické rovnice a goniometrické funkce). S tím, jak idiotský systém našeho školství postupně likvidoval výuku na základních školách, kapitola postupně bobtnala a po zkušenostech z podzimu 2011 jsem do kapitoly přidal i opakování základních početních operací.
Samozřejmě si nemyslím, že by několik opakovacích hodin stačilo na odstranění všeho, co by žáci měli spolehlivě umět a neumí. Cílem je ukázat žákům, kteří často vnímají matematiku jako zcela abstraktní a totálně odtrženou od reality, že je možné ji pojímat i jinak a odpověď na mnoho otázek hledat ve zkušenosti. V druhé řadě kapitola poskytuje trochu více času žáky poznat, identifikovat největší opozdilce a ty pak individuálně doučovat (časem se doufám podaří připravit nějaké postupy vycházející z učebnice pro ZŠ, zatím je to spíše na mé konkrétní improvizaci během doučování).
Je třeba se připravit, že ve třídě se žáky z různých škol budou obrovské rozdíly. I když není bezpodmínečně nutné, aby všichni zvládli látku do důsledků (téměř vše se bude brzy probírat znovu), nemělo by se stát, aby se slabší žáci zcela ztratili.
I když tato kapitola vytvoří asi měsíční ztrátu, rozhodně doporučuji nevynechávat.

Pedagogická poznámka: Žáci se samozřejmě smějí, že se mají učit něco tak jednoduchého jako sčítání a odčítání. Neřeším to, už v průběhu hodiny se rychle ukáže, že nejsou takoví mistři.

Matematika je abstraktní věda - nepracujeme v ní s objekty skutečnými, ale s abstraktními (například nekonečně tenká a nekonečně dlouhá a nekonečně rovná přímka ve skutečnosti neexistuje). Její užitečnost však spočívá v tom, že některé vlastnosti matematických objektů dobře popisují naši realitu. Takové příklady z reality pak můžeme používat jako modely a jejich chování nám může mnohé prozradit o chování ideálních matematických objektů. Zejména na naší úrovni je modelování velmi užitečné a používání modelů nám často napoví, jak máme postupovat dál.

Máme našetřeno 2900 Kč. Za brigádu dostaneme 4800 Kč. Kolik pak budeme mít?
Dáme obě částky dohromady: $2900+4800=7700$ Kč.
Až dostaneme peníze z brigády, budeme mít 7700 Kč.

Naše situace je modelem první matematické operace - **sčítání**. Výsledkem sčítání je počet, který získáme, když dáme dvě skupiny (stejné nebo různé) dohromady.
- Pokud máme skupin více, můžeme je sčítat postupně.
- Nezáleží na tom, kterou skupinu považujeme za první a kterou za druhou (stejně tak nezáleží na pořadí, pokud dáváme více skupin dohromady).

V druhém bodě nám model docela snadno ukazuje jednu ze základních (a velmi výhodných) vlastností sčítání – komutativnost (výsledek sčítání nezávisí na pořadí sčítanců).
Sčítání si tedy můžeme představit jako operaci, která ze dvou hromádek o libovolných počtech prvků vytvoří jednu společnou hromácku.

Tak už máme 7700 Kč, ale nový mobil stojí 9300 Kč. Kolik ještě musíme splašit?

$7700 + ? = 9300$ Kč
Jak najdeme číslo místo otazníku?

Představíme si 9300 Kč a odebereme 7700Kč, které už jsme našetřili.
$9300 - 7700 = 1600$ Kč
Musíme ještě našetřit 1600 Kč.

Druhá matematická operace - **odčítání**. Je opačná k operaci sčítání. Modelujeme ji tak, že z jedné hromady odebereme nějaký počet a zjišťujeme, kolik nám zbude (operace tak funguje obráceně než sčítání – z jedné hromádky vytvoříme dvě jiné).

- Záleží na tom, které číslo považujeme za původní hromadu, které za počet, který odebíráme.

Náš model nám ihned ukázal, že odčítání komutativní není.

Úspěšně ukončíme VŠ a připravujeme se na nástup do zaměstnání. Plat není špatný, životní náklady zatím nejsou příliš vysoké, takže každý měsíc ušetříme 7500 Kč. Kolik našetříme za rok?

Můžeme postupně přičítat 7500: $7500 + 7500 + 7500 + 7500 + \dots$.
Zavání to otročinou, ještěže rok má jen 12 měsíců. Pokud se v takové situaci budeme nacházet častěji, stálo by to za to vymyslet další matematickou operaci, která by nám výpočet usnadnila.
Násobení
$12 \cdot 7500 = 90000$ Kč
Za rok ušetříme 90 000 Kč.

Př. 1: Jakou roli hrají jednotlivá čísla v součinu $12 \cdot 7500 = 90\,000$? Popiš obecně situaci, kterou zachycuje násobení.

12 – počet skupin, 7500 – počet prvků v každé skupině, 90 000 – počet prvků ve skupině, kterou získáme jako sjednocení.
Násobení zachycuje sjednocení libovolného počtu **stejně velkých** skupin (vlastně jde o opakované sčítání stejných skupin).

Př. 2: Urči součin $5 \cdot 0$. Vysvětli výsledek pomocí modelu.

$5 \cdot 0 = 0$
Máme pět skupin (například pět pokladniček), které neobsahují žádné prvky (všechny jsou prázdné), dohromady nemáme nic.

Stejně jako sčítání i násobení má vlastnosti – například komutativnost. Vysvětluje náš model (sjednocení libovolného počtu stejných skupin), proč platí: $12 \cdot 7500 = 7500 \cdot 12 = 90\,000$?

Těžko. Není moc zřejmé, proč bychom sesypáním 12 výplat po 7500 Kč měli našetřit stejně peněz jako sesypáním 7500 "výplatek" po 12 Kč.

$\Rightarrow$ Nehodíme flintu do žita a zkusíme najít jiný model. Kde jinde jsme se setkali s tím, že něco počítáme jako součin dvou čísel?

Obsah obdélníku: $S = ab$. Čísla, která násobíme, představují délky stran, výsledek (obsah obdélníku) pak počet malých čtverečků, ze kterých je obdélník složen.

Př. 3: Vysvětli, jak z modelu násobení jako počítání obsahu obdélníku vyplývá, že výsledek násobení nezáleží na pořadí násobených čísel.

Místo obdélníku $12 \text{ x } 7500$ použijeme obdélník $7500 \text{ x } 12$. To ale není nový obdélník, pouze ten původní obdélník otočený o $90°$ a oba tedy obsahují úplně stejný počet malých čtverečků.

Dodatek: Obrázek obdélníku by nám mohl pomoci ke znázornění komutativnosti násobení i na původním modelu. Můžeme si představit, že jednotlivé prvky v jednotlivých skupinách uspořádáme a tyto skupiny pak seřadíme dohromady. Ihned vidíme, že jsme získali obdélník, jedna stran určuje počet prvků ve skupině, druhá strana počet skupin. Když obdélník otočíme, prohodí se význam obou čísel, ale počet prvků se nezmění.

Vrátíme se do života.
Vypadá to velmi optimisticky. Každý rok ušetříme 90 000 Kč. Zdá se, že můžeme myslet na pořízení bytu. Za jak dlouho našetříme 3 600 000 Kč na jeho koupi?
Můžeme postupně odečítat 90 000 Kč a počítat, kolikrát jsme museli odečíst 90000 Kč. Opět si to koleduje o nějaký zlepšovák.

Dělení

$3\,600\,000 : 90\,000 = 360 : 9 = 40$

Na byt budeme šetřit 20 let.

Př. 4: Navrhni model pro operaci dělení.

Modely dělení:

- rozdělujeme daný počet objektů na daný počet hromádek, tak aby na každé hromádce leželo stejně (například 30 bonbónů, na pět hromádek),
- rozdělujeme daný počet objektů na hromádky, tak aby na každé hromádce ležel daný počet (například 30 bonbónů, na hromádky po třech).

Př. 5: Kdy je výsledkem dělení číslo 1? Kdy je výsledkem dělení číslo 0? Vysvětli na modelu dělení.

Číslo 1 získáme, když dělíme libovolné číslo samo sebou. Pokud rozdáváme určitý počet věcí na stejný počet hromádek (například pět kostek na pět hromádek), na každou hromádku zbude jedna věc.
Číslo 0 získáme, když dělíme nulu libovolným jiným číslem. Když nemáme žádný prvek, budou všechny hromádky, na které rozdáváme, prázdné (bez ohledu na jejich počet).

Př. 6: Násobení můžeme používat jako kontrolu výsledků získaných dělením. $6:2=3$, protože $3\cdot 2=6$ (Když rozdělíme šest věcí na dvě hromádky, budou na každé hromádce tři věci, protože na dvou hromádkách se třemi věcmi je dohromady šest věcí). Jaké číslo bychom hledali při operaci $6:0$? Proč nemůžeme dělit nulou?

$6:0$ $\Rightarrow$ hledáme číslo, které se po vynásobení nulou bude rovnat šest $\Rightarrow$ určitě neuspějeme, protože každé číslo se po vynásobení nulou rovná nule.
Jiný pohled: $6:0$ rozdělujeme 6 věcí na nula hromádek, to ale nejde, protože 6 věcí musí být přinejhorším alespoň na jedné hromádce.

Pedagogická poznámka: Dělení nulou je dobrým indikátorem toho, jakým způsobem se žáci matematiku učili. V naprosté většině případů bohužel si pamatují, že "nulou nelze dělit". Na otázku proč většinou odpovídají, že to tak paní učitelka říkala. Navíc si někteří z nich pletou "nulou nelze dělit" s "nulu nelze dělit", což se projevuje už v příkladu 3.

Př. 7: Zopakovali jsme si čtyři základní početní operace (sčítání, odčítání, násobení, dělení). Tyto operace se dají rozdělit podle dvou různých hledisek do dvojic. Najdi tyto dvojice. Navrhni, jak všechny tyto vztahy zobrazit.

Pedagogická poznámka: Řešení posledního příkladu je uvedeno na počátku příští hodiny. Pokud do konce hodiny nezbývá více než 5 minut, nedoporučuji řešení prozrazovat, lepší je nechat žáky samostatně přemýšlet nad tím, jak operace uspořádat. I přes naprostou samozřejmost tento úkol není vůbec lehký a většina ho nezvládne.

Shrnutí: Základní početní operace si můžeme modelovat na práci s reálnými předměty.